# Materialien zur Vorlesung "Bewertung von Optionen"

**Burkhard Erke**

**Quellen[1]: Brealey/Myers, Kap. 20; Betsch et.al, Kap. C.III; Gerke/Bank, Kap. 4.5**

**Juni 2004**

[1] Einige Beispiele entstammen Folien, die Prof. Wahrenburg, Uni Frankfurt, für seine Vorlesung "Finanzwirtschaft" erstellt hat.

| |
|---|
| Lernziele |
| Was Optionen sind |
| Pay Offs/Financial Engineering |
| Die Put-Call-Parität |
| Wertgrenzen am Laufzeitende |
| Bewertung von Optionen während der Laufzeit |
| Contingent Claim Analysis |

# 1 Der Optionsvertrag

- Definition Optionsvertrag:
  - Für den Käufer:
    - Recht (keine Pflicht)
    - einen Vermögensgegenstand (Underlying)
    - zu einem vorab festgelegten Ausübungspreis (Strike, Exercise Price)
    - innerhalb der Laufzeit (amerikanische Option) oder am Verfallstag (europäische Option)
    - zu kaufen (Call Option) oder zu verkaufen (Put Option).
  - Verkäufer (Stillhalter):
    Pflicht, das Underlying zu kaufen.
- Optionspositionen:
  - Long call
  - Long put
  - Short call
  - Short put
- Terminologie:
  - Moneyness von Calls:
    - At-the-money option Strike=aktueller Kurs
    - In-the-money option Strike $<$ aktueller Kurs
    - Out-of-the money option Strike $>$aktueller Kurs
  - Moneyness von Puts: $<>$Zeichen vertauschen

- Bestandteile eines Optionsvertrages
  - Optionsprämie=Preis der Option
  - Optionsfrist (Laufzeit, Maturity)
  - Ausübungspreis (Strike)
  - Basiswert (Underlying Asset)
  - Sonderklassen z.B.
    - Dividendenschutz,
    - Verwässerungsschutz
- Weitere Formen von Optionsgeschäften:
  - Optionsscheine
  - Optionsanleihen
  - Wandelanleihen
  - Kündbare Anleihen

# 2 Payoffs europäischer Standardoptionen am Laufzeitenende

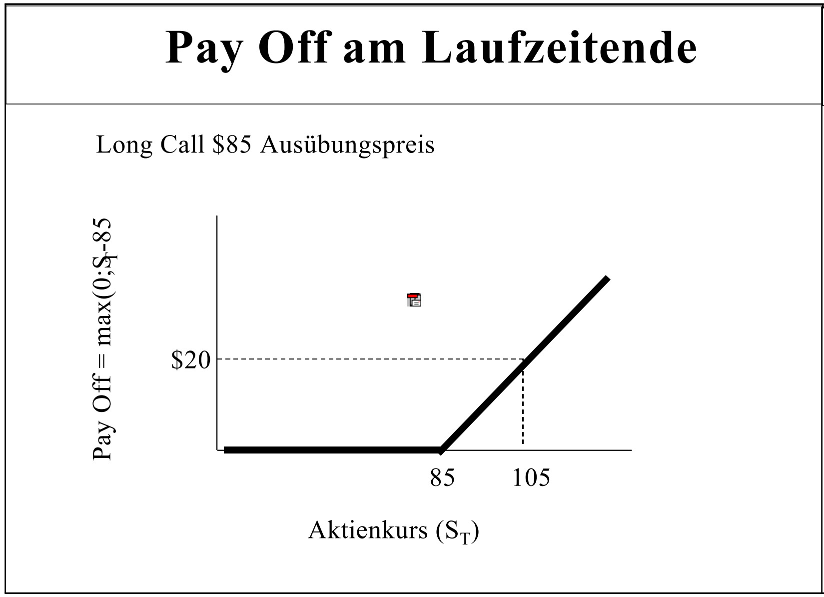
- Beispiel: Call und Put Optionen auf Aktien von Intel im Juli 1998. Der Kurs der Aktie lag im Juli 1998 bei 85$ (und heute?)

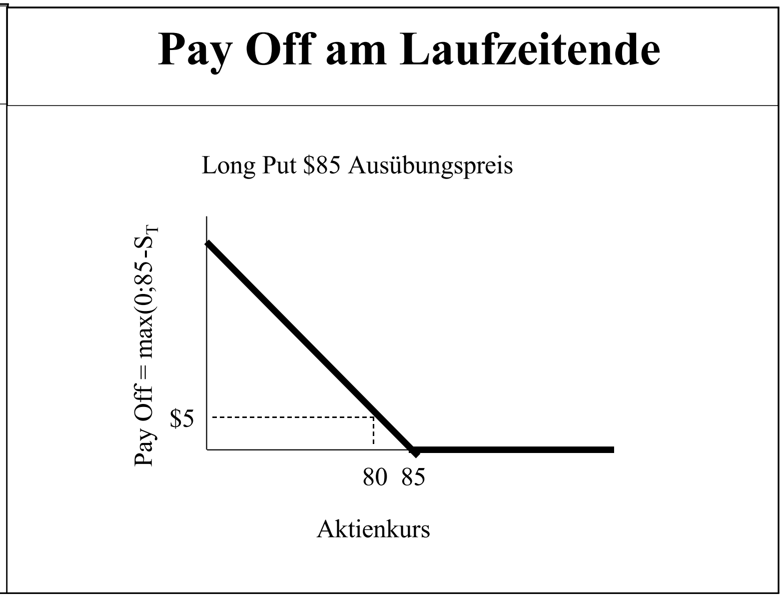
| Ausübungstermin | Ausübungspreis | Preis der Call Option | Preis der Put Option |
|---|---|---|---|
| Oktober 1998 | $80 | $8,875 | $3,25 |
| Januar 1999 | $85 | 8,625 | 4,75 |

- Wert der Optionen am Laufzeitenende in Abhängigkeit vom Aktienkurs:

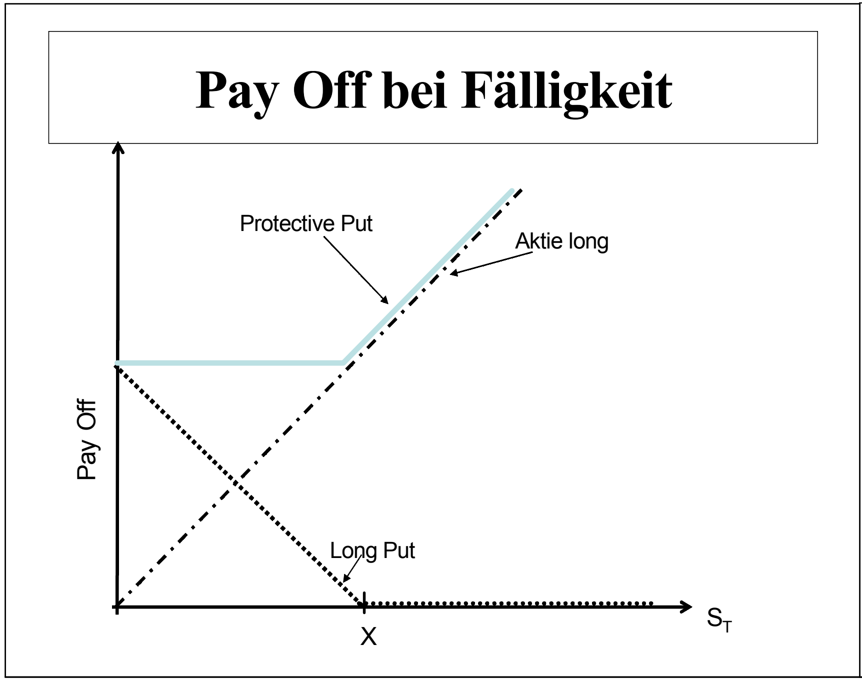
| Aktienkurs | $60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Preis Call Option | 0 | 0 | 0 | 5 | 15 | 25 |
| Preis Put Option | 25 | 15 | 5 | 0 | 0 | 0 |

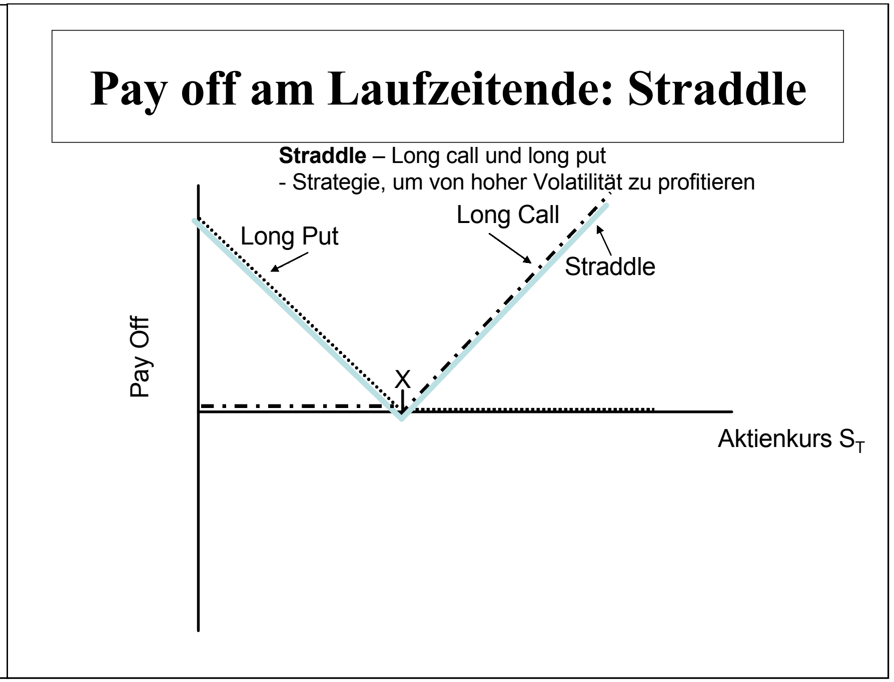
- Graphik: Long Call/Long Put



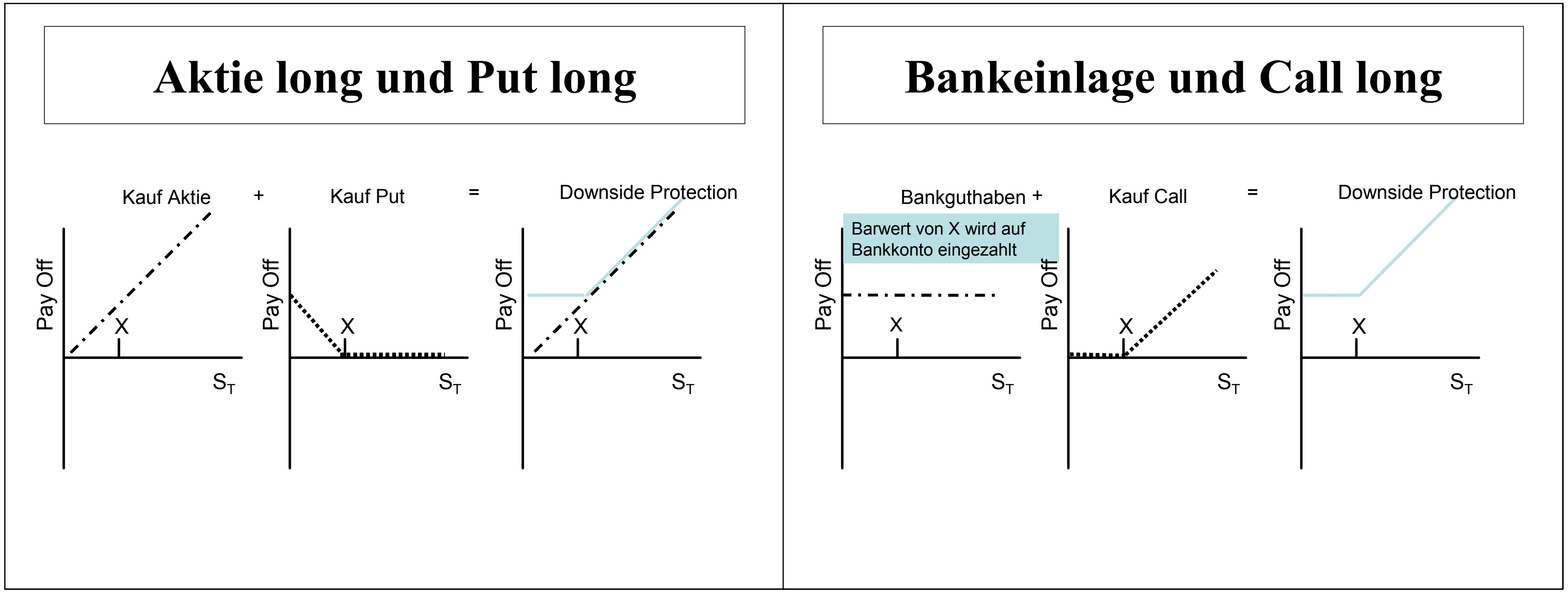



- Was macht Optionen zu "einzigartigen Innovationen"?
  - Asymmetrisches Kreditrisiko
    Kreditwürdigkeit des Käufers irrelevant $\Rightarrow$ anonymer Handel ohne Marginleistung möglich
  - Durch Portfoliobildung aus Optionen, Underlying und Anleihen können vielfältige Pay Offs generiert werden.
  - Graphik: Protective Put und Straddle



# 3 Put-Call-Parität




- Fazit:

Wert europäischer Call + Barwert des Ausübungspreises = Wert europäischer Put + Aktienkurs

$$
\begin{aligned}
c_t + Xe^{-i(T-t)} &= S_t + p_t \\
&\Rightarrow p_t = c_t - S_t + Xe^{-i(T-t)}
\end{aligned}
$$

# 4 Wertgrenzen am Laufzeitende

| | |
|---|---|
| c: Wert Europäischer Call | S: aktueller Aktienkurs in t |
| p: Wert Europäischer Put | X: Ausübungspreis |
| C: Wert Amerikanischer Call | T-t: Laufzeit |
| P Wert Amerikanischer Put | $\sigma$ : Volatilität der Aktie |
| | $S_T$: Aktienkurs in T |
| | i: risikoloser Zins |

Table 1: Notation Optionsbewertung

## 4.1 Wertuntergrenze für einen Call

- Für Option auf Aktie ohne Dividendenzahlung bis T gilt:

$$c_t > S_t - X$$

- In Graphik 1: Der Preis des Calls $c_t$ wird niemals unter die dicke rechte Linie ($=S_t - X$) fallen.
  - Optionspreis = \$5; Ausübungspreis = \$85; Aktienkurs Intel = \$100 $\Rightarrow c_t = 5 < S_t - X = 15$
  - Investor macht folgendes Geschäft:

| Handlung | Zahlung |
|---|---:|
| Verkauf Aktie | 100 |
| Kauf Option | -5 |
| Ausübung Option | -85 |
| Saldo | 10 |

"Money Machine"!!!!

  - Das machen alle, der Optionspreis steigt mindestens bis zur dicken rechten Linie.

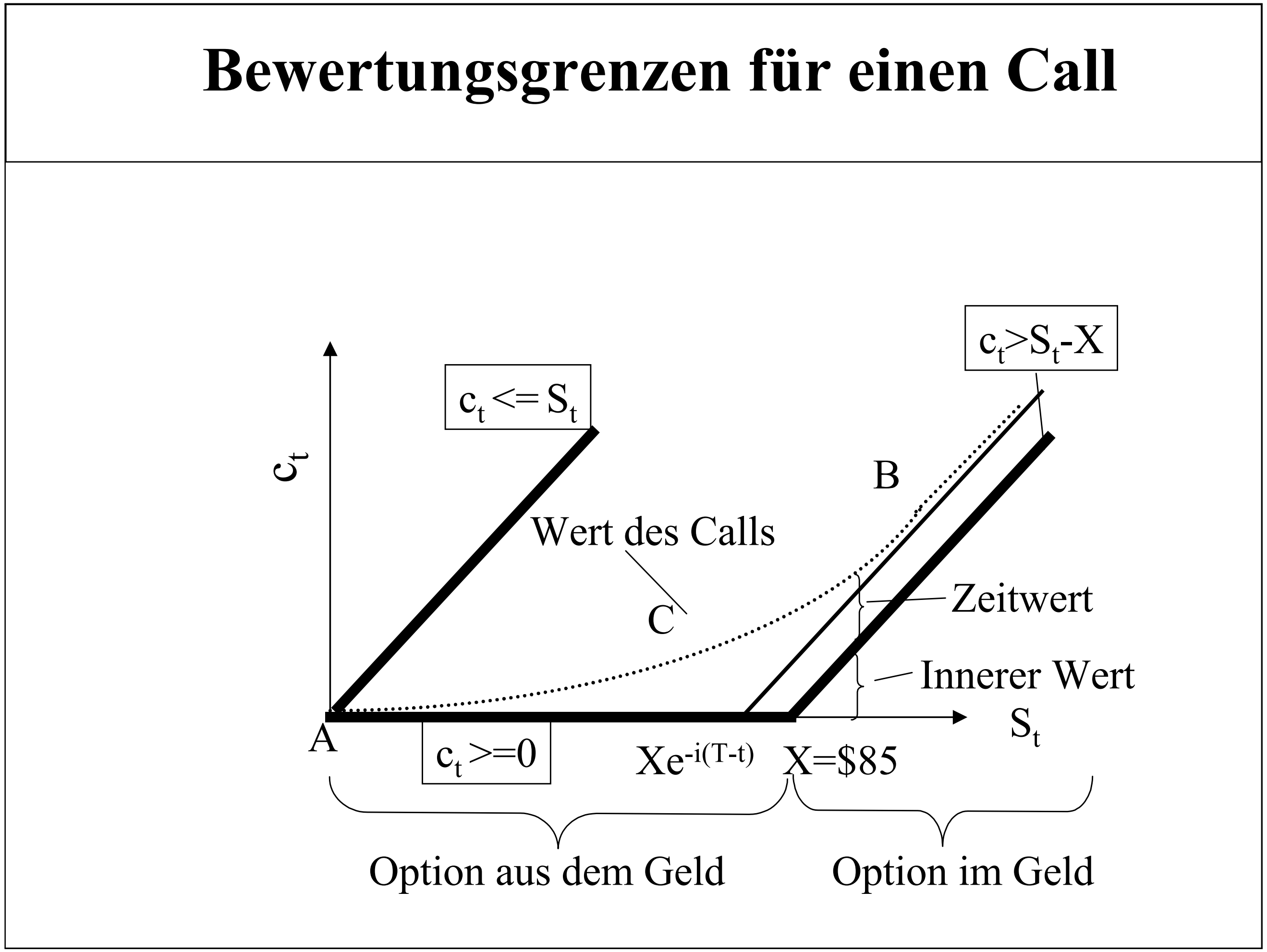



Figure 1: Bewertungsgrenzen

### 4.2 Wertobergrenze für einen Call

- Für Option auf Aktie ohne Dividendenzahlung bis T gilt:

$$c_t \leq S_t$$

- In Graphik 1: Der Preis des Calls $c_t$ wird niemals über die dicke 45°-Linie ($=S_t$) steigen.
- Die Option kann niemals mehr Wert sein, als die zugrungeliegende Aktie!

## 5 Optionsbewertung während der Laufzeit

### 5.1 Vorüberlegungen

- Der Optionspreis wird irgendwo zwischen den dicken Linien in Graphik 1 liegen.
- Genauer: Gestrichelte Linie in Graphik 1.
  - Punkt A: Wenn die Aktie wertlos ist, muß auch der Preis der Option null sein.
  - Punkt B: Aktienkurs sehr hoch. Optionspreis nähert sich Barwert des Ausübungspreises an.
    * Gepunktete Linie wird zur Parallelen der Wertuntergrenze
    * Je höher der Aktienkurs, desto größer die Wahrscheinlichkeit, dass die Option ausgeübt wird. Irgendwann ist die Ausübung praktisch "sicher".
    * Wer einen Call besitzt, der mit "Sicherheit" ausgeübt wird, besitzt eigentlich die Aktie.
    * Unterschied: Für die Aktie muß erst später - bei Ausübung - gezahlt werden.
    * Also: Kauf des Calls = Kauf der Aktie (teilweise) auf Kredit.
    * Implizit wird der Barwert des Ausübungspreises geliehen.
    * Preis Call $c_t = S - Xe^{-i(T-t)}$.
    * Je höher der Zins (i) und je länger die Laufzeit (T-t), desto teurer der Call.

- Punkt C: Der Optionspreis liegt immer oberhalb seiner Wertuntergrenze
  - Aktienkurs entspricht dem Ausübungspreis des Calls
  - Fall 1: Option heute ausgeübt, weil Verfallstag: Preis = 0
  - Fall 2: Verfall erst in 3 Monaten.
  - Was kann passieren?

| Ergebnis | Pay Off |
|---|---|
| Aktienkurs steigt (Wahrscheinlichkeit prob) | Aktienkurs - Ausübungspreis, (Option ausüben) |
| Aktienkurs fällt (Wahrscheinlichkeit 1-prob) | 0 (Option verfällt) |

  - Im ungünstigsten Fall Auszahlung 0. Also muß Option im Punkt C noch einen Preis > 0 haben!
  - Abstand der gepunkteten Linie von der X-Achse: Hängt von der Wahrscheinlichkeit ab, dass der Aktienkurs starke Ausschläge macht. Wird durch $\sigma$ gemessen.
  - Je volatiler der Aktienkurs, desto größer der Abstand und desto teurer die Option!

- Wirkung der Variablen auf den Preis einer Option:

| Variable | c | p |
|---|---|---|
| S | + | - |
| X | - | + |
| T | + | +/- |
| $\sigma$ | + | + |
| i | + | - |

## 5.2 Das Binominalbewertungsmodell für 1 Periode

### 5.2.1 Beispiel: Call Option auf Aktien von Intel,

- Daten:
  - Laufzeit 6 Monate, Ausübungspreis X=\$85; Aktienkurs aktuell \$85
  - Zins: i=2,5% pro Halbjahr
  - In 6 Monaten kann der Aktienkurs zwei Werte annehmen:
- Aktie

$$\begin{array}{ccl} \underline{Periode\ 0} & & \underline{Periode\ 1} \\ & & uS = 106{,}25 \\ & \nearrow & \\ 85 & & \\ & \searrow & \\ & & dS = 68 \end{array}$$

- – Hieraus folgt für den Call:

$$\begin{array}{ccl} \underline{Periode\ 0} & & \underline{Periode\ 1} \\ & & C_u = \max(0; u\,\mathrm{S} - K) = \max(0; 106,25 - 85) = 21{,}25 \\ & \nearrow & \\ c=? & & \\ & \searrow & \\ & & C_d = \max(0; d\,\mathrm{S} - K : 0) = \max(0; 68 - 85) = 0 \end{array}$$

- Aussagen über Call Preis c möglich?

- Duplizierungsportefeuille für die Call Option:
  - Kaufe $\Delta$ Aktien
  - Investiere $b$ Euro in Anleihen

($\Delta$ und $b$ sind unbekannt)

- Cash Flow bei Fälligkeit:

| | Duplizierungsportfolio | Call |
|---|---|---|
| up: | $106{,}25 \cdot \Delta + b \cdot \left(1+0{,}025\right)$ | $= 21{,}25$ |
| down: | $68 \cdot \Delta + b \cdot \left(1+0{,}025\right)$ | $= 0$ |

- Erste minus zweite Gleichung:

$106.25 \cdot \Delta + b \cdot (1 + 0.025) = 21.25$

$-(68 \cdot \Delta + b \cdot (1 + 0.025) = 0)$

$= 106.25 \cdot \Delta - 68 \cdot \Delta = 21.25$, Lösung ist: $\Delta = 0.555\,56$

- Einsetzen $\Delta = 0.555\,56$ ergibt $68 \cdot 0.555\,56 + b \cdot (1 + 0.025) = 0$, Die Lösung ist: $b = -36.857$
- Folglich muss das Duplizierungsportfolio folgendermaßen aussehen:
  - Kauf von $0.555\,56$ Akien
  - Kreditaufnahme $36.857$
- Marktwert der Call Option ist c:

$$\Delta S + (-b) = c = 0.555\,56 \cdot 85 - 36.857 = 10.366$$

### 5.2.2 Noch ein Beispiel: Put Option auf Aktien von Intel

- Daten:
  - Laufzeit 6 Monate, Ausübungspreis X=$85; Aktienkurs aktuell $85
  - Zins: i=2,5% pro Halbjahr
  - In 6 Monaten kann der Aktienkurs zwei Werte annehmen:

- Aktie

$$
\begin{array}{lcl}
\underline{\textit{Periode 0}} & & \underline{\textit{Periode 1}} \\
 & & uS = 106{,}25 \\
 & \nearrow & \\
85 & & \\
 & \searrow & \\
 & & dS = 68
\end{array}
$$

- – Hieraus folgt für den Put:

$$
\begin{array}{lcl}
\underline{\textit{Periode 0}} & & \underline{\textit{Periode 1}} \\
 & & P_u = \max\left(K - u\,\mathrm{S}; 0\right) = \max\left(85 - 106,25; 0\right) = 0 \\
 & \nearrow & \\
p=? & & \\
 & \searrow & \\
 & & P_d = \max\left(K - d\,\mathrm{S}; 0\right) = \max\left(85 - 68; 0\right) = 17
\end{array}
$$

- Aussagen über Putpreis p möglich?

- Duplizierungsportefeuille für die Put Option:
  - Kaufe $\Delta$ Aktien
  - Investiere $b$ Euro in Anleihen

($\Delta$ und $b$ sind unbekannt)

- Cash Flow bei Fälligkeit:

| | Duplizierungsportfolio | Put |
|---|---|---|
| up: | $106{,}25 \cdot \Delta + b \cdot \left(1+0{,}025\right)$ | $= 0$ |
| down: | $68 \cdot \Delta + b \cdot \left(1+0{,}025\right)$ | $= 17$ |

- Erste minus zweite Gleichung:

$106.25 \cdot \Delta + b \cdot (1 + 0.025) = 0$

$-(68 \cdot \Delta + b \cdot (1 + 0.025) = 17)$

$106.25 \cdot \Delta - 68 \cdot \Delta = -17$, Lösung ist: $-0.44444$

- Einsetzen $\Delta = -0.44444$ ergibt $68 \cdot (-0.44444) + b \cdot (1 + 0.025) = 17$, Lösung ist: b=$46.07$
- Folglich muss das Duplizierungsportfolio folgendermaßen aussehen:
  - Verkauf von $0.44444$ Akien
  - Kauf von Anleihen: $46.07$
- Marktwert der Put Option ist p:

$$\Delta S + b = p = -0.44444 \cdot 85 + 46.07 = 8.2926$$

## 5.3 Verallgemeinerung: Duplizierung Call Option

- Eine Call Option hat den payoff $C_u$ und $C_d$
- Duplizierung mittels Portfoliobildung. Kauf von $\Delta$ Aktien und Anlage von $b$ Euros in Anleihen
- Für $\Delta$ und $b$ gilt:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{uS - dS}; \qquad b = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+i)}$$

- Der Preis für einen call ist dann

$$\begin{aligned} c &= \Delta S + b \\ &= \frac{C_u - C_d}{uS - dS} \cdot S + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+i)} \\ &= \frac{(prob)\, C_u + (1 - prob)\, C_d}{(1+i)} \end{aligned} \tag{1}$$

mit

$$prob = \frac{(1+i) - d}{u - d}$$

- $prob$ ist kann als Wahrscheinlichkeit aufgefaßt werden.
- Dann ist der Preis eines Calls nichts anderes als der Barwert des bei Fälligkeit *erwarteten* Call Preises.

## 5.4 Risikoneutrale Bewertung für einen Call/Put

- Wichtig: In der Ableitung der Optionspreisformel (1) kommt die Wahrscheinlichkeit einer Kurssteigerung nicht vor!

  Sie hat keinen Einfluß auf den Optionswert!

- Es gibt eine Möglichkeit, $prob$ in (1) als Wahrscheinlichkeit zu interpretieren:

  Anleger sind risikoneutral!

  - Wir tun so, als ob die Welt risikoneutral wäre"!
  - Erwartete Rendite = Sicherer Zins :
  - Der Optionswert ergibt sich bei Risikoneutralität als abgezinster erwarteter Pay Off

- Beispiel: *Call Option* auf Aktien von Intel

$$prob = \frac{1 + 0.025 - 0.8}{1.25 - 0.8} = 0.5$$

$$\frac{0.5 \times 21,25 + 0.5 \times (0)}{1,025} = \frac{10,625}{1,025} = 10.366$$

- Beispiel: *Put Option* auf Aktien von Intel

$$\frac{(0.5 \times 0 + 0.5 \times 17)}{1.025} = \frac{8.5}{1.025} = 8.29$$

## 5.5 Die Optionsbewertung nach Black-Scholes

- Zugrundeliegendes Konzept:
  - Wichtige Annahmen bis auf weiteres: Europäische Option und keine Dividendenzahlungen!
  - Option und Aktien hängen von der gleichen Quelle der Unsicherheit ab
  - Ein Portfolio aus Aktie und Option kann gebildet werden, so dass für eine kurze Zeitperiode das Aktienkursrisiko eliminiert werden kann.
  - Das Portfolio ist risikolos und muß im Marktgleichgewicht eine Rendite in Höhe des risikolosen Zins aufweisen.
  - Der Black-Scholes Wert ist derjenige Wert, der diese Bedingung erfüllt.
- Die Black-Scholes Formel $(Europäische\ Option\ und\ keine\ Dividendenzahlungen)$ für einen Call:

$$c_0 = \underbrace{S_0 \times N(d_1)}_{Aktie \times Delta +} - \underbrace{Xe^{-iT} N(d_2)}_{\text{Short position in Anleihen}}$$

  - $$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(i + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$
  - $$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$
  - Benötigte Parameter:
    *

| | | |
|---|---|---|
| Kurs des Underlying heute | sicherer Zins | Laufzeit |
| Ausübungskurs | Volatilität des Underlying | |

    * $N(X)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine *standardnormalverteilte Variable* geringer als X ist.

- Beispiel: Was ist der Preis der folgenden *Call Option*?
  - Daten
    * $S_0 = 36$
    * $i = 10\%$
    * $\sigma = 40\%$
    * $X = 40$
    * $T = 90 Tage/365$
  - Lösung:
    * $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(i + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(\frac{36}{40}\right) + \left(0{,}1 + \frac{0{,}4^2}{2}\right)\frac{90}{365}}{0{,}4\sqrt{\frac{90}{365}}} = -0,3070$
    * $N(d_1) = 1 - .6206 = .3794$
    * $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = -.5056$
    * $N(d2) = 1 - .6935 = .3065$
    * $c_0 = S_0 \times N(d_1) \quad -Xe^{-iT}\, N(d_2) = 36 \times [.3794] - 40 \times [.3065] \times e^{-(.10)\times(.2466)} = 1.70$

- Die Black-Scholes Formel $(Europäische\ Option\ und\ keine\ Dividendenzahlungen)$ für einen Put:
  - Aus der Put-Call-Parität: $Put\ Price = p_t = c_t - S_t + Xe^{-i(T-t)}$.
  - Hieraus folgt:

$$p_0 = S_0 \times [N(d_1) - 1] \qquad - Xe^{-iT} [N(d_2) - 1]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(i + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

  - Benötigte Parameter:
    * Kurs des Underlying heute
    * Ausübungskurs
    * sicherer Zins
    * Volatilität des Underlying
    * Laufzeit
  - $N(X)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine *standardnormalverteilte Variable* geringer als X ist.
- Beispiel: Was ist der Preis der folgenden Put Option?
  - Daten:
    * $S_0 = 41$
    * $i = 10\%$
    * $X = 40$
    * $T = 180 Tage/365$
    * Preis für die Call Option ist $c = 4$
  - Aus der Put-Call-Parität: $Put\ Price = p_t = c_t - S_t + Xe^{-i(T-t)} = 4 - 41 + 40e^{-.5 \times .1} = 1,049$

- Die Black-Scholes Formel $(Europäische\ Option\ mit\ Dividendenzahlungen)$für einen Call:

$$c_0 = S_0 e^{-dT} N(d_1) \quad - \quad X e^{-iT} N(d_2)$$

  –
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(i - d + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

  –
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

  – $d$ ist die Dividendenrendite

## 5.6 Numerische Optionsbewertung mit Binominalbäumen

- Erweiterung des Binominalmodells auf 2 Perioden.
- Häufig benutzt zur Bewertung komplexer Optionen
- In jedem Zeitintervall geht der Aktienkurs um Faktor $u$ nach oben oder um Faktor $d$ nach unten
- Optionen werden durch Rückwärtsinduktion bewertet (s.u.)
- Es sei $S_0 = 50$; $u = 1.05$; $d = 0.95$; $i = 0.001$

$$\begin{tikzcd}
\underline{Periode\ 0 = \ \ Heute} & \underline{Periode\ 1} & \underline{Periode\ 2 = \ \ Fälligkeit} \\
 & & S_2 = u^2 \cdot S_0 = 55.125 \\
 & S_1 = u \cdot S = 52.50 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 50 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2 = u \cdot d \cdot S_0 = 50.40 \\
 & S_1 = d \cdot S = 48.00 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2 = d^2 \cdot S_0 = 46.08
\end{tikzcd}$$

- Beispiel: Europäischer Call
  - X = 50;

- Fortsetzung Beispiel:

| $\underline{\textit{Periode 0 = Heute}}$ | | $\underline{\textit{Periode 1}}$ | | $\underline{\textit{Periode 2 = Fälligkeit}}$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | $S_2 = u^2 \cdot S_0 = 55.125$ <br> $C_{uu} = 5.125$ |
| | | | $\nearrow$ | |
| | | $S_1 = u \cdot S = 52.50$ <br> $C_u = ?$ | | |
| | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |
| $S_0 = 50$ <br> $c = ?$ | | | | $S_2 = u \cdot d \cdot S_0 = 50.40$ <br> $C_{ud} = 0.40$ |
| | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |
| | | $S_1 = d \cdot S = 48.00$ <br> $C_d = ?$ | | |
| | | | $\searrow$ | |
| | | | | $S_2 = d^2 \cdot S_0 = 46.08$ <br> $C_{dd} = 0.00$ |

- Bewertung durch Rückwärtsinduktion: $C_d$

| | Duplizierungsportfolio | Put |
|---|---|---|
| up: | $50.40 \cdot \Delta + b \cdot (1+0{,}001)$ | $= 0.40$ |
| down: | $46.08 \cdot \Delta + b \cdot (1+0{,}001)$ | $= 0$ |

- $50.40 \cdot \Delta + b \cdot (1 + 0.001) = 0.4$

  $-(46.08 \cdot \Delta + b \cdot (1 + 0.001) = 0)$

  $50.40 \cdot \Delta - 46.08 \cdot \Delta = 0.4$, Lösung ist: $9.2593 \times 10^{-2}$

  Einsetzen $\Delta = 9.2593 \times 10^{-2}$ ergibt $46.08 \cdot 9.2593 \times 10^{-2} + b \cdot (1 + 0.001) = 0$, Lösung ist: $-4.2624$

  Portfolio: Kaufe 0,0926 Aktien und nehme Kredit auf in Höhe von 4,262

  $C_d = 9.2593 \times 10^{-2} \cdot 48 - 4.2624 = 0.18206$

- Fortsetzung Beispiel:

| $\underline{Periode\ 0 = \ \ Heute}$ | | $\underline{Periode\ 1}$ | | $\underline{Periode\ 2 = \ \ Fälligkeit}$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | $S_2 = u^2 \cdot S_0 = 55.125$ <br> $C_{uu} = 5.125$ |
| | | | $\nearrow$ | |
| | | $S_1 = u \cdot S = 52.50$ <br> $C_u = ?$ | | |
| | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |
| $S_0 = 50$ <br> $c = ?$ | | | | $S_2 = u \cdot d \cdot S_0 = 50.40$ <br> $C_{ud} = 0.40$ |
| | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |
| | | $S_1 = d \cdot S = 48.00$ <br> $\underline{C_d = 0.182\,06}$ | | |
| | | | $\searrow$ | |
| | | | | $S_2 = d^2 \cdot S_0 = 46.08$ <br> $C_{dd} = 0.00$ |

- Bewertung durch Rückwärtsinduktion: $C_u$

| | Duplizierungsportfolio | Put |
|---|---|---|
| up: | $55.125 \cdot \Delta + b \cdot \left(1{+}0{,}001\right)$ | $= 5.125$ |
| down: | $50.40 \cdot \Delta + b \cdot \left(1{+}0{,}001\right)$ | $= 0.4$ |

- $55.125 \cdot \Delta + b \cdot (1 + 0.001) = 5,125$

  $-(50.4 \cdot \Delta + b \cdot (1 + 0.001) = 0.4)$

  $55.125 \cdot \Delta - 50.4 \cdot \Delta = 5.125 - 0.4$, Lösung ist: $1.0$

  Einsetzen $\Delta = 1$ ergibt $50.4 \cdot 1 + b \cdot (1 + 0.001) = 0.4$, Lösung ist: $-49.95$

  Portfolio: Kaufe 1 Aktien und nehme Kredit auf in Höhe von $49.95$

  $C_u = 1 \cdot 52.5 - 49.95 = 2.55$

- Fortsetzung Beispiel:

| $\underline{Periode\ 0 = \ \ Heute}$ | | $\underline{Periode\ 1}$ | | $\underline{Periode\ 2 = \ \ Fälligkeit}$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | $S_2 = u^2 \cdot S_0 = 55.125$ |
| | | | $\nearrow$ | $C_{uu} = 5.125$ |
| | | $S_1 = u \cdot S = 52.50$ | | |
| | $\nearrow$ | $C_u = \underline{2.55}$ | $\searrow$ | |
| $S_0 = 50$ | | | | $S_2 = u \cdot d \cdot S_0 = 50.40$ |
| $c = ?$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $C_{ud} = 0.40$ |
| | | $S_1 = d \cdot S = 48.00$ | | |
| | | $\underline{C_d = 0.18206}$ | $\searrow$ | |
| | | | | $S_2 = d^2 \cdot S_0 = 46.08$ |
| | | | | $C_{dd} = 0.00$ |

- Bewertung durch Rückwärtsinduktion: $c$

| | Duplizierungsportfolio | Put |
|---|---|---|
| up: | $52.5 \cdot \Delta + b \cdot \left(1+0{,}001\right)$ | $= 2.55$ |
| down: | $48 \cdot \Delta + b \cdot \left(1+0{,}001\right)$ | $= 0.18206$ |

- $52.5 \cdot \Delta + b \cdot (1 + 0.001) = 2.55$

  $-(48 \cdot \Delta + b \cdot (1 + 0.001) = 0.18206)$

  $52.5 \cdot \Delta - 48 \cdot \Delta = 2.55 - 0.18206$, Lösung ist: $0.52621$

  Einsetzen $\Delta = 0.52621$ ergibt $48 \cdot 0.52621 + b \cdot (1 + 0.001) = 0.18206$, Lösung ist: $-25.051$

  Portfolio: Kaufe $0.18206$ Aktien und nehme Kredit auf in Höhe von $25.051$

  $c = 0.52621 \cdot 50 - 25.051 = 1.2595$

# 6 Anleihen und Aktien als Optionen

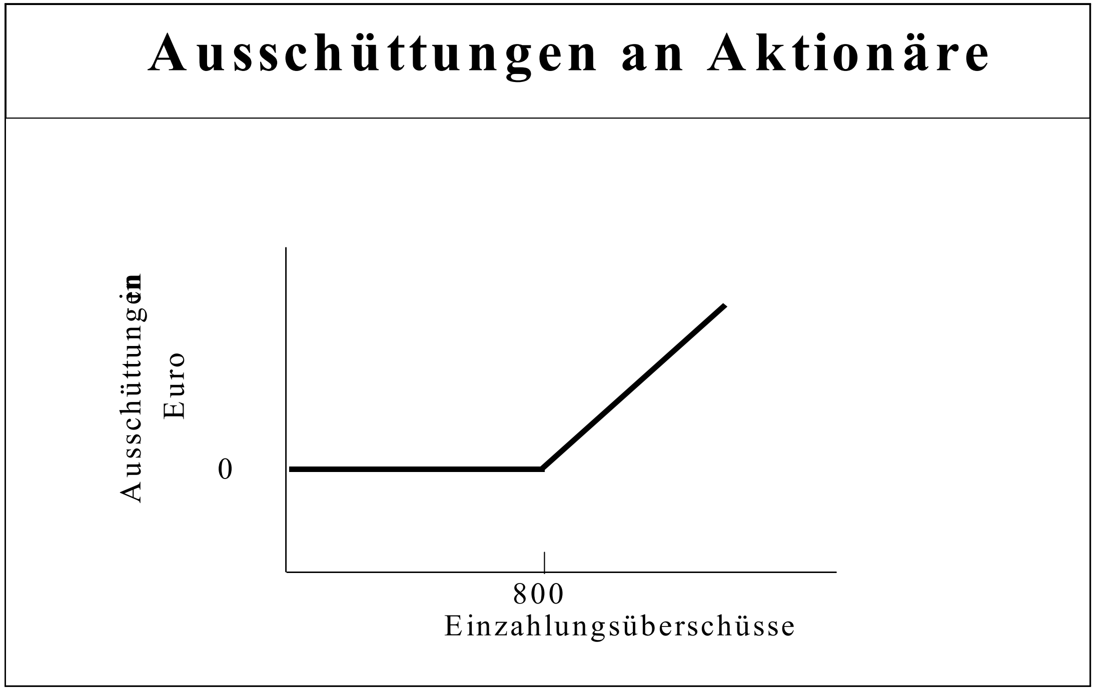
- Anwendung der Bewertungstheorien für derivative Finanzinstrumente auf andere Bewertungsfragen:
  - Eigenkapital einer Unternehmung mit beschränkter Haftung der Eigentümer (limited liability) = Call Option auf das gesamte Unternehmensvermögen
  - Fremdkapital einer Unternehmung = Put Option

## 6.1 Beispiel zur Erläuterung

- Daten:
  - Unternehmen wird heute für ein bestimmtes Vorhaben gegründet (EXPO, Olympische Spiele etc.)
  - Unternehmenseigner lösen das Unternehmen im nächsten Jahr wieder auf.
  - Finanzierung mit Fremdkapital über Emission einer Anleihe
  - Zinsen und Tilgung im nächsten Jahr EUR 800
  - Prognose der Einzahlungsüberschüsse (Alle vier Szenarien sind gleich wahrscheinlich (1/4)):

| | Sehr erfolgreich | erfolgreich | wenig erfolgreich | Misserfolg |
|---|---|---|---|---|
| Einzahlungsüberschüsse vor Zinsen und Tilgung | 1000 | 850 | 700 | 550 |
| Zinsen und Tilgung | 800 | 800 | 700 | 550 |
| Ausschüttung an Aktionäre | 200 | 50 | 0 | 0 |

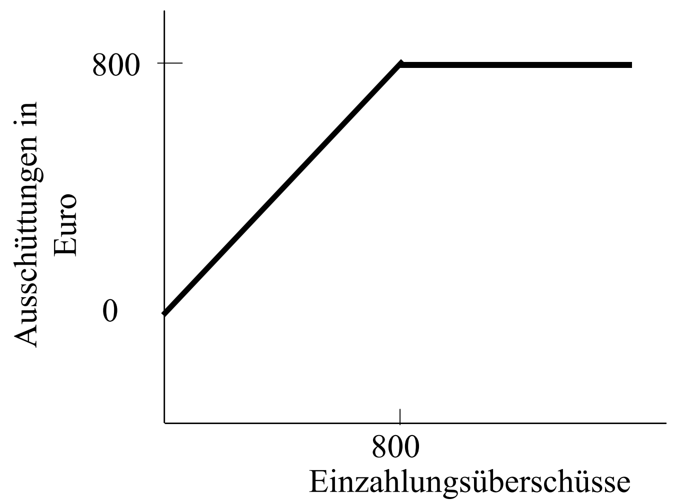
### 6.1.1 Interpretation des Unternehmens als Kaufoption




- Aktionäre besitzen eine Kaufoption auf des Unternehmensvermögen mit Basispreis 800
  - Vermögensgegenstand der Kaufoption: Basiswert = Unternehmensvermögen (Underlying)

1. Einzahlungsüberschüsse < 800: Aktionäre erhalten nichts! *Kaufoption ist aus dem Geld*. Aktionäre üben die Option nicht aus, Anleihegläubiger erhalten die gesamten erwirtschafteten Rückflüsse
2. Einzahlungsüberschüsse > 800: Aktionäre erhalten 1 Euro für jeden Euro, den die Einzahlungsüberschüsse über 800 liegen. *Kaufoption ist im Geld*. Aktionäre üben die Option aus. Kauf des Unternehmens von den Anleihegläubigern zu 800

# Zahlungen an Gläubiger




- Gläubiger
  - sind die Eigentümer des Unternehmens und
  - haben eine *Kaufoption* verkauft
    1. Einzahlungsüberschüsse $>$ 800: Aktionäre üben Option aus und kaufen von den Gläubiger das Unternehmen für exakt 800
    2. Einzahlungsüberschüsse $<$ 800: Inhaber der Anleihe erhalten die gesamten Rückflüsse und bleiben Eigentümer

### 6.1.2 Interpretation des Unternehmens als Verkaufsoption

- Aktionäre
  - besitzen das Unternehmen
  - schulden den Inhabern der Anleihen 800
  - besitzen eine Verkaufsoption auf das Unternehmen mit einem Basispreis von 800
    1. Einzahlungsüberschüsse $<$ 800: *Verkaufsoption ist im Geld*. Aktionäre üben die Option aus. Basispreis (800) wird mit Verbindlichkeiten gegenüber Anleihegläubigern (800) verrechnet. Also besitzen die Aktionäre am Ende nichts mehr
    2. Einzahlungsüberschüsse $>$ 800: *Verkaufsoption ist aus dem Geld*. Aktionäre üben die Option nicht aus. Behalten das Unternehmen, zahlen aber 800 Zinsen und Tilgung an Gläubiger.
- Inhaber der Anleihe:
  - wird 800 geschuldet,
  - haben eine Verkaufsoption auf das Unternehmen mit einem Basispreis von 800 verkauft.
    1. Einzahlungsüberschüsse $<$ 800: *Verkaufsoption ist im Geld*. Aktionäre üben die Option aus. Inhaber der Anleihe müssen 800 für das Unternehmen zahlen. Wegen Forderungen in Höhe von 800 können beide Forderungen miteinander verrechnet werden. Anleihegläubiger neue Eigentümer.
    2. Einzahlungsüberschüsse $>$ 800: *Verkaufsoption ist aus dem Geld*. Aktionäre üben die Option nicht aus. Inhaber der Anleihen erhalten von den Aktionären die geschuldeten 800.
- Wichtige Schlußfolgerung:
  - Risikofreie Anleihe: Aktionäre schulden den Anleihegläubigern 800
  - Riskante Anleihe: Differenz aus risikofreier Anleihe und Verkaufsoption

Wert einer riskanten Anleihe = Wert einer risikofreien Anleihe - Wert der Verkaufsoption

### 6.1.3 Zusammenführung der Sichtweisen

- Ausgangspunkt: Put-Call Parität:
  Wert Europäischer Call -Wert Europäischer Put =Aktienkurs - Barwert des Basispreises
- Hier:
  - Aktienkurs = Unternehmenswert
  - Barwert des Basispreises = Zahlungsversprechen an Anleihegläubiger
  - Also gilt:
    Wert Kaufoption -Wert Verkaufsoption = Unternehmenswert - Zahlungsversprechen an Anleihegläubiger
- Aktionäre besitzen *Kaufoption*
  - Dann gilt für den *Marktwert des Eigenkapitals*:
    Wert Kaufoption = Unternehmenswert - Zahlungsversprechen an Anleihegläubiger + Wert Verkaufsoption
  - Es gilt für den *Marktwert des Fremdkapitals*:
    Wert riskante Anleihe = Unternehmenswert - Wert Kaufoption
    Wert riskante Anleihe = Zahlungsversprechen an Anleihegläubiger - Wert Verkaufsoption

Bilanz zu Marktwerten

| | |
|---|---|
| Marktwert der Assets | *Marktwert Fremdkapital*= Zahlungsversprechen an Anleihegläubiger - Wert Verkaufsoption |
| | *Martwert des Eigenkapitals* = Unternehmenswert - Zahlungsversprechen an Anleihegläubiger + Wert Verkaufsoption |
| | Unternehmenswert = Marktwert der Assets |

# 7 Zusammenfassung

- Zwei grundsätzliche Optionstypen:
  - Amerikanischer Call/ Put: Ausübung jederzeit
  - Europäischer Call/Put: Ausübung nur am Ende der Laufzeit
- Optionsbewertung:
  - Der Wert der Option steigt mit dem Verhältnis von Aktienkurs zu Ausübungspreis
  - Je höher der Zins und je länger die Laufzeit, desto höher der Optionswert
  - Optionsinhaber können von höherer Volatilität des Underlying (Aktie) nur profitieren. Der Wert der Option steigt wenn die Volatilität zunimmt.
- Optionsbewertung wenn der Aktienkurs nur zwei Ausprägungen annehmen kann:
  - Call = kreditfinanzierter Aktienkauf
  - Put = Aktie short und risikolose Geldanlage
  - Oder: Risikoneutrale Bewertung
- Black-Scholes liefern Formel für ein Kontinuum zukünftiger Aktienkurse.
- Contingent Claim Analysis:
  - Marktwert Fremdkapital = Barwert Zahlungsversprechen - Wert Verkaufsoption
  - Marktwert Eigenkapital = Unternehmenswert - Barwert Zahlungsversprechen an Anleihegläubiger + Wert Verkaufsoption
  - Unternehmenswert = Wert Assets